УДК 524.85

В. А. Юров

ПРИЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА

Исследуется остававшаяся ранее неизвестной связь между уравнениями Эйнштейна — Фридмана для вселенной, заполненной скалярным полем, и специального вида уравнением Абеля первого рода; в частности, показывается, как из общего решения вышеупомянутого уравнения Абеля строится общее решение соответствующего уравнения Фридмана.

An interesting connection between Einstein-Friedmann equations for the models of universe filled with scalar field and the special form of Abel equation of the first kind is presented. In particular, it is shown how, knowing the general solution of the Abel equation (corresponding to the given scalar field potential) one can obtain the general solution of the Friedmann Equation.

Ключевые слова: уравнение Абеля, уравнения Эйнштейна — Фридмана, скалярное поле.

Key words: Abel equation, Einstein-Friedmann equations, scalar field.

Уравнение Абеля, впервые представленное в классической работе 1881 г. [1], неоднократно привлекало к себе внимание исследователей [2; 3] (см. также [4; 5]). Одним из источников подобного интереса следует считать тот факт, что уравнения Абеля часто появляются в результате операции понижения порядка многих семейств дифференциальных уравнений второго (и высших) порядков [6; 7], в свою очередь служащих математическими моделями задач из самых разных областей знания.

В данной работе мы представляем еще одну, ранее неизвестную область применения уравнения Абеля. Как будет показано ниже, общее решение космологических уравнений Эйнштейна — Фридмана для вселенной, заполненной скалярным полем с известным потенциалом, взаимно однозначно связано с общим решением уравнения Абеля первого рода.

Начнем с уравнения Фридмана для однородной изотропной вселенной в метрике Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера:

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+\frac{dV}{d\phi}=0,\ H^2=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V-\frac{k}{a^2}\ , \tag{1}$$

где a — масштабный фактор; ϕ — скалярное поле; V – потенциал скалярного поля, H — постоянная Хаббла $H=\dot{a}/a$, k = 0, ± 1, и, кроме того, мы воспользовались масштабированием $8\pi G/3=c=1$.

Пусть k = 0. Воспользовавшись приведенным в [8] методом, введем функционал полной энергии (гамильтониан) W:

$$W=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\phi), \tag{2}$$

после чего перепишем систему (1) как:

$$\frac{dW}{d\phi}=-3H\dot{\phi},\ \ H=\pm\sqrt{W}\ . \tag{3}$$

Отметим, что знание точного вида функции $W=W(\phi)$ позволяет элементарным образом вычислить все остальные параметры: $\phi=\phi(t), a=a(t), V=V(\phi)$. Функция $\phi(t)$ может быть найдена путем решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\phi}{dt}=\mp\frac{1}{3}\frac{W'(\phi)}{W(\phi)}, \tag{4}$$

потенциал V определяется соотношением:

$$V(\phi)=W(\phi)-\frac{1}{18}\frac{\left(W'(\phi)\right)^2}{W(\phi)}, \qquad (5)$$

а масштабный фактор $a(t)=\exp\left(\int H(t)\,dt\right)$ получается подстановкой $\phi(t)$ из (4) в (3) с последующим интегрированием.

Интегрирование (4) приводит к появлению константы t_0 за счет трансляционной инвариантности (1), которую можно устранить сдвигом $t\to t+const$. Для того чтобы решение $\phi=\phi(t;t_0,C)$ было общим, необходимо появление еще одной независимой константы *C*. Чтобы получить эту константу, достаточно, приняв (5) за дифференциальное уравнение по переменной $W(\phi)$ с заданной $V(\phi)$, найти его общее решение. Это решение как раз и будет содержать искомую константу интегрирования *C*.

Суммируя все вышесказанное, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Если для заданного $V(\phi)$ общим решением уравнения (5) является $W(\phi,C)$, то общее решение $\phi(t;t_0,C)$ уравнения Фридмана (1) в точности соответствует общему решению уравнения (4).

Следовательно, задача эффективным образом сводится к нахождению общего решения (5) для заданного $V(\phi)$.

Замечание. Случай *W* = 0 следует рассмотреть особо. Как нетрудно убедиться, для любого заданного $V\le 0$ автоматически H = 0 ($a(t)=a_0=\ =const$, т.е. вселенная стационарна) и общее решение (1) содержит единственную константу интегрирования:

$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{d\phi}{\sqrt{-2V(\phi)}}=\pm\left(t-t_0\right), & V\neq 0;\\ \phi=\phi_0, & V=0.\end{cases} \qquad (6)$$

Следовательно, этот случай имеет физический смысл только при неположительном потенциале $V(\phi)$ [9]. Кроме того, любопытно отметить, что параметр уравнения состояния $w=p/\rho=\infty$, где под ρ мы понимаем плотность, а под p — давление скалярного поля.

Основной результат данной работы заключается в следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть* $x=3\sqrt{2}\,\phi$, $\chi=\ln|V|$, $\kappa=\pm 1$. *Для заданного* $V(\phi)$ *соответствующий гамильтониан* $W=W(x,C)$ *определяется из*

$$W(x,C)=V(x)\left(\frac{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^2+1}{1-\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^2}\right)^2, \qquad (7)$$

где $y=y(x,C)\neq\pm 1$ — *общее решение следующего уравнения Абеля первого рода:*

$$y'=-\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)\left(\kappa-\chi'\ \ y\right). \qquad (8)$$

Особый случай V = 0 имеет место тогда и только тогда, когда $y=\pm 1$, *а гамильтониан W имеет вид*

$$W=C\,e^{\kappa x}. \qquad (9)$$

Доказательство теоремы производится прямым вычислением.

Уравнение (7) порождает семейство решений уравнения (1), параметризованное константой *C*. Подставляя $W(x,C)$ в (4), после интегрирования получим $\phi=\phi(t;t_0,C)$, где t_0 — вторая константа интегрирования, связанная с инвариантностью скалярного поля относительно преобразований вида $t\to t+const$. Иными словами, предлагаемый алгоритм действительно позволяет отыскать общее решение уравнения (1), что и составляет главный результат данной работы.

Список литературы

1. *Abel N.H.* Oeuvres Complétes II. S. Lie and L. Sylow, Eds., Christiana, 1881.
2. *Appell P.* Sur les invariants de quelques équations différentielles. // Journal de Math. (4). 5. (1889) 361—423.
3. *R. Liouville.* Sur une équation différentielle du premier ordre // Acta Math. 27 (1903) 55—78.

4. *Murphy G. M.* Ordinary Differential Equations and Their Solution // Princeton, NJ: Van Nostrand, 1960.
5. *Zwillinger D.* Handbook of Differential Equations, 3rd ed. // Boston, MA: Academic Press. 1997. P. 120.
6. *Kamke E.* Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen // Chelsea Publishing Co, New York. 1959.
7. *Sachdev P. L.* A Compendium of Nonlinear Ordinary Differential Equations // John Wiley & Sons, 1997.
8. *Chervon S. V., Zhuravlev V. M., Shchigolev V. K.* New exact solutions in standard inflationary models // Phys. Lett. B398. (1997) 269—273.
9. *Felder G., Frolov A.* et al. Cosmology With Negative Potentials // Phys. Rev. D66 (2002) 023507.

Об авторе

В. А. Юров — асп., Колумбийский университет, Миссури, США, vayt37@mail.missouri.edu

Author

V. A. Yurov — PhD Student, Columbia University, Missouri, USA.